§1. Сандық қатар ұғымы

$a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n...$ сандарының шексіз тізбегі берілсін. Ең алғаш сандық тізбек ұғымы (Математика І, ІХ тарау, §1) да енгізілген. Тізбекке енген сандардан құрылған

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \qquad (3.1)$$

өрнегін қатар немесе, дәлірек айтқанда, ***сандық қатар*** дейтін боламыз. $a_1, a_2, ...$ сандарының өзін қатардың бірінші, екінші т.с.с. мүшелері, a_n – ***қатардың жалпы мүшесі*** деп аталады. (3.1) өрнегінің мүшелері арасында «+» таңбасы бар. Бір қарағанда өрнек қосынды жүргізуді талап ететіндей жазылған. Бірақ қосу амалын шектеулі саны бар қосылғыштарға ғана қатысты анықтауға болады. Ал қосылғыштардың шексіз болу жағдайында барлық мүшелерді алып тауысу мүмкін емес. (3.1) өрнегін мағыналы ету үшін анализдің негізгі амалы болып келетін шекке көшу амалына сүйенеміз. (3.1) қатарына ***ішінара қосындылар*** немесе ***дербес қосындылар*** деп аталатын $\{S_n\}$ тізбегін сәйкестікке қоямыз. Бұл тізбектің мүшелері

$$\{S_n\}: S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, ...,$$

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n, ... \qquad (3.2)$$

түрінде анықталады, демек әрбір келесі ішінара S_n қосындысы, өзінің алдындағы ішінара S_{n-1} қосындысына a_n мүшесін қосқан кезде табылады.

3.1-анықтама. Егер ішінара қосындылар тізбегінің $n \to \infty$-ке ұмтылуында соңғы

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \qquad (3.3)$$

шегі бар болса, (3.1) қатары ***жинақталған***, ал S саны ***қатардың қосындысы*** деп аталады. Айтқанға сәйкес

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n \qquad (3.4)$$

Егер $\{S_n\}$ тізбегінің ақырлы шегі болмаса, (3.1) қатары ***жинақталмаған*** деп аталады.

1-мысал. Шексіз қатар мысалына жақсы танымал геометриялық прогрессия жатады:

$$a + aq +\ldots aq^2 + \ \ + aq^{n-1}+\ldots \qquad (3.5)$$

мұнда $a \neq 0$. Оның алғашқы n мүшесінің S_n қосындысы

$$S_n = \frac{a\left(1-q^n\right)}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}q^n.$$

формуласымен кескінделетіні белгілі. Мұнда жеке-жеке төрт жағдайды қарастыруға тура келеді .

1) $\left|q^n\right| < 1$ болсын. Сонда $n\to\infty$ ұмтылуында $q^n \to 0$, демек

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}.$$

Осы жағдайда (3.5) қатары жинақталады және оның қосындысы $S = \dfrac{a}{1-q}$ болады.

2) $\left|q\right|>1$. Онда $n \to \infty$ ұмтылуында q^n абсолют шамасы бойынша шектеусіз өсіп, алғашқы n мүшесінің S_n қосындысы шексіз артады. Сондықтан (3.5) қатары жинақталмайды және қосындысы болмайды.

3) $q = 1$ болсын. Сонда (3.5) қатары

$$a + a +\ldots a +\ldots \ (a \neq 0)$$

түріне келіп, $S_n = a+\ldots+a = na$, демек $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, атап айтқанда, (3.5) қатары жинақталмайды.

4) $q = -1$ болсын. Сонда (3.5) қатары

$$a-a+a-a+\ldots+\left(-1\right)^{n-1}a+\ldots$$

түріне келеді. S_n шамасы n-нің жұп немесе тақ болуына байланысты нөлге немесе a-ға тең. n-нің шектеусіз өсуінде S_n-нің шегі болмайды және (3.5) қатары жинақталмайды.

Сонымен, (3.5) шексіз геометриялық прогрессиясы тек $|q|<1$ жағдайында ғана жинақталған болып, $\frac{a}{1-q}$ қосындысына ие болады.

2-мысал. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$

қатары бар болсын. Осы қатарды жинақтылыққа зерттеу үшін оның ішінара қосындыларының тізбегін қарастырамыз:

$$S_1=\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2},\; S_2=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=1-\frac{1}{3},$$

$$S_3=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=1-\frac{1}{4},\ \ldots,$$

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}.$$

Сонда $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$, демек қарастырылып отырған қатар жинақталады және оның қосындысы 1-ге тең болады.

§2. Жинақталатын қатардың негізгі қасиеттері

Қатарлардың кейбір элементар қасиеттерін атап өтейік.

Теорема 3.1. Егер жинақталатын $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ қатарының барлық мүшелерін бірден-бір b санына көбейтсе, онда шығатын қатар да жинақталған және оның қосындысы (3.1) қатарының қосындысын b-ға көбейткенге тең болады:

$$\sum_{n=1}^{\infty}ba_n=b\sum_{n=1}^{\infty}a_n \tag{3.6}$$

Бұл теореманың дәлелдемесі тікелей $\sum_{n=1}^{N} ba_n = b\sum_{n=1}^{N} a_n$ теңдігінде $N \to \infty$ ұмтылуында шекке көшкеннен шығады.

***3.2-анықтама**: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ және $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қатарларының қосындысы (айырымы) деп $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ түріндегі қатарды айтамыз.*

***Теорема 3.2.** Жинақталатын екі қатардың қосындысы (айырымы) жинақталған қатар болады; сонымен бірге*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n . \tag{3.7}$$

Шынында, кез келген соңғы N үшін $\sum_{n=1}^{N}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{N} a_n \pm \sum_{n=1}^{N} b_n$ *болғандықтан,* $N \to \infty$ *ұмтылуында, шегінде* (3.7) *теңдігіне келеміз.*

***3.3-анықтама**. Берілген* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *қатарының алдыңғы m мүшесін алып тастағаннан шығатын*

$$a_{m+1} + a_{m+2} + ... + a_{m+k} + ... = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \tag{3.8}$$

қатары $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *қатарының m-ші қалдығы деп аталады.*

***Теорема 3.3**. Егер* (3.1) *қатары жинақты болса, онда оның* (3.7) *қалдықтарының кез келгені жинақты болады және керісінше* (3.7) *қалдығының жинақтылығынан бастапқы* (3.1) *қатарының да жинақтылығы туындайды. Басқаша айтқанда, қатардың бастапқы бірнеше мүшесін алып тастағаннан не оның алдыңғы жағына бірнеше мүше қосып жазғаннан ол қатардың жинақталу немесе жинақталмаушылық қасиеттері өзгермейді.*

***Теорема 3.4**. Егер* (3.1) *қатары жинақталса, онда* $m \to \infty$, *оның* (3.8) *қалдығы нөлге ұмтылады.*

***Дәлелдеме**: Қатар жинақталатын болғандықтан,* $S = S_m + r_m$ *теңдігі орындалады. (Мұндағы* $r_m = a_{m+1} + a_{m+2} + ...$*) және* $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ *болатыны айқын. Олай болса*

$$\lim_{m\to\infty}\left(S_m + r_m\right) = \lim_{m\to\infty} S_m + \lim_{m\to\infty} r_m = S + \lim_{m\to\infty} r_m = S \Rightarrow \lim_{m\to\infty} r_m = 0.$$

***Теорема 3.5**. (**Қатар жинақтылығының қажетті шарты**). Егер* (3.1) *қатары жинақталса, онда $n \to \infty$, оның жалпы мүшесі $a_n \to \infty$. Атап айтқанда*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{3.9}$$

***Дәлелдеме**: Қатар жинақталатын болғандықтан,* $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ *және* $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$ *болатыны айқын. Осы қатардың екі ішінара қосындысын құрайық:*

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1}, \quad S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n.$$

Сонда $a_n = S_n - S_{n-1}$. *Енді осы теңдікте шекке көшкеннен*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(S_n - S_{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Демек $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$ *Теорема дәлелденді.*

Айта кететін жайт - (3.9) *теңдігі қатар жинақтылығының қажетті шарты ғана болып келеді.* Мүмкін (3.9) теңдігі жинақтылық үшін жеткілікті де болар? Осы сұраққа жауап беру үшін

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} + ... \tag{3.10}$$

қатарын қарастырайық. (*3.9*) теңдігі бұл қатар үшін орындалады, өйткені

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Енді оның *n*-ші ішінара қосындысын бағалайық:

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}, \forall n.$$

Бұл жерде әрбір мүшені одан артпайтын $\frac{1}{\sqrt{n}}$ санымен ауыстырдық. Сонымен, кез келген *n* үшін $S_n > \sqrt{n}$ теңсіздігі шығып отыр. $n \to \infty$ болғанда, теңсіздіктің оң жағы ∞ – ке ұмтылады, демек, $S_n \to \infty$. Олай болса (3.10) қатары жинақталмаған. Бұл мысал (3.9) теңдігі қатардың жинақтылығы үшін қажетті шарт қана, бірақ жеткілікті емес екендігін көрсетеді.

§3. Оң мүшелі қатарлар

Әрбір мүшесі теріс болмайтын

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{3.11}$$

қатары ***оң мүшелі қатар*** делінеді. Берілген (3.11) қатарының мүшелерін оң деп алып, оның ішінара қосындыларының $\{S_n\}$ тізбегін қарастырайық:

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3, ...,\ S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n, ...,.$$

Сонда $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$ болатыны айқын. Демек (3.11) қатарының ішінара қосындыларының $\{S_n\}$ тізбегі өспелі айнымалы болады. Монотонды айнымалының шегі туралы теоремаға сүйенсек, біз бірден қатарлар теориясындағы мына негізгі теоремаға келеміз:

Теорема 3.6. Оң қатар жинақты болу үшін оның ішінара қосындылар тізбегі жоғарыдан шектелген болуы қажет және жеткілікті.

Егер оң қатары жинақты болса, онда барлық *n* үшін

$$S_n < S \tag{3.12}$$

теңсіздігі орындалатыны айқын. Бұл теорема - қатардың жинақты болуының қажетті және жеткілікті шарты. Сонымен бірге, бұл теореманы іс жүзінде қолдану өте қолайсыз. Өйткені ішінара қосындылар тізбегінің жоғарыдан шектелгендігін көрсету көп жағдайларда мүмкін емес.

Сондықтан, әрі қарай мүшелері оң қатарлардың қандай жағдайда жинақты және қандай жағдайда жинақсыз болатындығын көрсететін жеткілікті белгілерді баяндаймыз.

§4. Қатарларды салыстыру белгілері

Көптеген жағдайда қандай да бір оң қатардың жинақты-жинақсыз екендігін анықтау үшін берілген қатармен салыстыратын және жинақтылығы (немесе жинақсыздығы) күні-бұрын белгілі тағы бір қатар болуы керек.

***Теорема** 3.7.* Оң мүшелі

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{3.13}$$

және

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{3.14}$$

қатарларының мүшелері белгілі бір $n > N$-нен бастап $a_n \le b_n$ шартын қанағаттандырса, (3.13) қатарының жинақты болмауынан (3.14) қатарының жинақталмайтындығы немесе (3.14) қатарының жинақты болуынан (3.13) қатарының жинақталмағандығы шығады.

Теорема 3.8. Оң мүшелі (3.13) және (3.14) қатарларының a_n және b_n жалпы мүшелері үшін

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = c \ne 0 \text{ немесе } \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = k \ne 0$$

ақырлы шектері бар болса, онда (3.13) және (3.14) қатарларының екеуі бірдей жинақталған не екеуі де жинақталмаған қатарлар болады.

Дәлелдеме. Теореманың шарты бойынша

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = c \ne 0 \text{, демек } \forall\varepsilon > 0, \exists n > N : \left|\frac{a_n}{b_n} - c\right| < \varepsilon$$

немесе $c - \varepsilon < \dfrac{a_n}{b_n} < c + \varepsilon$, яғни

$$(c-\varepsilon)b_n < a_n < (c+\varepsilon)b_n.$$

Егер (3.13) қатары жинақталатын болса, онда $(c-\varepsilon)b_n < a_n$ болуы себепті 3.7-теоремаға сүйеніп, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c-\varepsilon)b_n$ қатарының жинақты болатынын көреміз. Онда сол теорема бойынша (3.14) қатары да жинақты. Енді (3.14) қатары жинақты болса,

$a_n < (c+\varepsilon)b_n$. Бұдан (3.13) қатарының жинақталған қатар екенін көреміз.

1-мысал.

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots \tag{3.15}$$

қатарын қарастырайық. Оның бірінші мүшесін алып тастап, §l, 2-мысалдағы жинақты

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$$

қатарымен салыстырайық. Сонда

$$\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1\cdot 2},\ \frac{1}{3^2}<\frac{1}{2\cdot 3},\ldots,\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n(n+1)}$$

айқын теңсіздіктерге келеміз. Бұдан §2, *3*.3-теоремаға және салыстыру белгісіне сүйеніп, (3.15) қатарының жинақты болатынына көз жеткіземіз. Әрі қарай, (3.15) қатарымен салыстырудан $p > 2$ болуында

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\ldots$$

қатарының жинақтылығы туындайды. Осы соңғы қатар $p > 1$ болуында жинақталатынын, ал $p \le 1$ үшін жинақты болмайтынын дәлелдеуге болады.

2-мысал. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^2}}$ қатарының жинақты немесе жинақталмаған екендігін тексеру талап етіледі.

Шешімі. $\frac{n+1}{\sqrt{n^2}}>\frac{n}{\sqrt{n^3}}\ge\frac{n+1}{\sqrt{n}}$ теңсіздігі орынды. Ал жалпы мүшесі $\frac{1}{\sqrt{n}}$-ге тең болатын қатар жинақталмайды (§2-дегі мысал). Олай болса қарастырылып отырған қатар да жинақталмайды (*3.7*-теореманы қараңыз).

3-мысал. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n-2}{\sqrt{n^3}}$ қатарының жинақталу-жинақталмауын зерттеңіз.

Шешімі. $x = \dfrac{3n-2}{n^3} < \dfrac{3n}{n^3} = \dfrac{3}{n^2}$ теңсіздігі айқын. Ал $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3}{n^2}$ қатары жинақты. Олай болса *3.7*-теоремаға сәйкес зерттеліп отырған қатар да жинақты болады.

4-мысал. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4+n}{3+n^3}$ қатарының жинақты-жинақсыз болуын зерттеңіз.

Шешімі: Берілген қатардың жалпы мүшесі $\dfrac{4+n}{3+n^3}$, $n \to \infty$ нөлге ұмтылады. Бұл қатарды жинақталатын $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ қатарымен салыстырамыз. Сонда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4+n}{3+n^3} : \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+n^3}{3+n^3} = 1 \neq 0 .$$

Демек, 3.8-теоремаға сәйкес берілген қатар жинақты.

5-мысал. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left|1+\dfrac{3}{n}\right|$ қатарының жинақты–жинақсыз болуын зерттеңіз.

Шешімі: Қатардың жалпы мүшесі үшін $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\ln\left(1+\dfrac{3}{n}\right)\right] = 0$.

Қатарды әрі қарай зерттейміз. Ол үшін оны жинақталмайтын $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3}{n}$ қатарымен салыстырамыз. Сонда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{3}{n}\right) : \frac{3}{n}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)}{\frac{3}{n}} = 1 \neq 0 .$$

Сондықтан берілген қатар жинақталмайды (3.8-теорема).

§5. Қатар жинақталуының кейбір белгілері

Қатар мүшелерінің сипаты бойынша оның жинақты-жинақсыз болуы жөнінде кесім жасауға мүмкіндік беретін қатар жинақтылығының көптеген белгілері бар. Солардың кейбіреуіне тоқталайық.

5.1. Жинақталудың Даламбер белгісі

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатарының мүшелері оң болып, n-нің шектеусіз өсуінде, оның $n+1$ мүшесінің алдыңғы, n мүшесіне алынған қатынасының шегі бар болып, ол D-ға тең болсын, атап айтқанда $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=D$ болсын. Онда:

1. $D<1$ болса, қатар жинақталады;
2. $D>1$ болса, қатар жинақталмайды;
3. $D=1$ болуында, қатардың жинақты болу-болмауы жөнінде белгі тиянақты тұжырым бере алмайды, атап айтқанда, бұл жағдайда қатар жинақты да, жинақсыз да болуы мүмкін.

6-мысал. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{n!}$ қатарын жинақты-жинақсыздыққа зерттеңіз.

Шешімі: $a_n=\dfrac{n^n}{n!}$, $a_{n+1}=\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$ болғандықтан,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}\cdot n!}{n^n\cdot(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1.$$

Демек қатар жинақталмайды.

7-мысал. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3}{(n+1)!}$ қатарын жинақты-жинақсыздыққа зерттеңіз.

Шешімі. $a_n=\dfrac{n^3}{(n+1)!}$, $a_{n+1}=\dfrac{(n+1)^3}{(n+1)!}$ болғандықтан,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)^3}{(n+2)!}:\frac{n^3}{(n+1)!}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n+2}=0<1$$

Олай болса қатар жинақталады.

8-мысал. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2-1}}{2^{n^2}\sqrt{n}}$ қатарының жинақты-жинақсыз екендігін анықтаныз.

Шешімі. $a_n = \frac{3^{n^2-1}}{2^{n^2}\sqrt{n}}$ және $a_{n+1} = \frac{3^{(n+1)^2-1}}{2^{(n+1)^2}\sqrt{n+1}}$

болғандықтан,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n^2+2\text{ï}} \cdot 2^{n^2} \cdot \sqrt{n}}{2^{(n+1)^2} \cdot 3^{n^2-1} \cdot \sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{2n+1} \cdot \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{\text{ï}}}} = \infty.$$

Ендеше қатар жинақталмайды.

5.2. Коши белгісі

Оң мүшелі

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

қатары үшін

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = K \tag{3.16}$$

шегі бар болса, онда $K < 1$ болғанда қатар жинақталады, ал $K > 1$ болуында жинақталмайды.

Дәлелдеме. Егер $K < 1$ болса, онда $K + \varepsilon < 1$ болатындай кіші $\varepsilon > 0$ саны табылады. Онда (3.16)-дан $\left|\sqrt[n]{a_n} - K\right| < \varepsilon$ немесе $K - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < K + \varepsilon$, $n > N$. Бұдан жалпы мүшесі $(K+\varepsilon)^n$ болатын қатар (кемімелі геометриялық прогрессия ретінде) жинақталады. Олай болса салыстыру теоремасы бойынша (3.7-теорема) берілген қатар жинақты болады $\left(a_n < (K+\varepsilon)^n\right)$.

Енді $K > 1$ болса, онда қандай да бір N–нен бастап, кез келген $n > N$ үшін $\sqrt[n]{a_n} > 1$. Демек қатардың жинақты болуының қажетті шарты орындалмайды. Олай болса, қатар жинақталмайды. Теорема дәлелденді.

9-мысал. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}$

қатарының жинақты болу-болмауын тексеріңіз.

Шешімі. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1.$

Олай болса Коши белгісі бойынша қатар жинақталады.

10-мысал. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n-4}{3n+5}\right)^{n}$ қатарының жинақты болуы–болмауын зерттеңіз.

Шешімі. $a_n=\left(\frac{6n-4}{3n+5}\right)^{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n-4}{3n+5}=2>1.$

Олай болса Коши белгісі бойынша қатар жинақталмайды.

Ескерту. 1. $D=1$ болғанда Даламбер белгісі бойынша, ал $K=1$ болғанда Коши белгісі бойынша қатардың жинақтылығы жөнінде тиянақты қорытынды жасау мүмкін емес.

2. Егер қатардың жинақты болу–болмауы Даламбер белгісі бойынша анықталса, онда ол Коши белгісі бойынша да анықталады. Ал кері пікір дұрыс емес, атап айтқанда, қатарды зерттеуде Даламбер белгісі қолданылмайтын жағдайда оған Коши белгісі де қолданылмайды деуге болмайды. Осы жайтқа байланысты кейде ***Коши белгісі*** Даламбер белгісінен ***күштірек*** деп айтылады.

5.3. Кошидің интегралдық белгісі

Егер $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ қатары беріліп, онымен бірге $x\geq x_0$ мәндерінде анықталған, үзіліссіз, оң және монотонды кемімелі $f(x)$ функциясы үшін кейбір $n\geq N$ нөмірінен бастап, $a_n=f(n)$ теңдігі орындалып, $\int\limits_{x_0}^{\infty}f(x)dx$ меншіксіз интегралы жинақталса, онда берілген қатар да жинақталады, ал егер интеграл жинақталмаса, онда қатар да жинақталмайды.